Apostila de Matemática Básica

Esta apostila tem por finalidade auxiliar os alunos matriculados na disciplina "Matemática Básica – Nivelamento" do Curso de Licenciatura em Matemática do Campus Universitário de Sinop. Nela, estão inseridos os principais conceitos matemáticos em nível básico, sendo requisitos necessários para a compreensão de conteúdos que serão abordados em outras disciplinas do curso. Nela, as definições matemáticas aparecem de forma clara e objetiva, além de apresentar exemplos e vários exercícios para a fixação dos conceitos.

Profa. Ms. Luciana M. Elias de Assis

Sumário

Aula 9

Razão e proporção

Razão: A **razão** entre grandezas de mesma natureza é a razão entre os números que expressam as medidas dessas grandezas, na mesma unidade.

Exemplo: João é o cestinha da equipe de basquete de sua escola. Em um jogo, de 16 arremessos, João acertou 12. E Pedro, seu colega de equipe, acertou 12 dos 24 arremessos que fez. Qual deles teve um aproveitamento melhor nesse jogo?

Para resolvermos este problema, devemos relacionar o número total de acertos com o total de arremessos de cada um:

João: $\frac{n^o acertos}{n^o arrremessos} = \frac{12}{16} = \frac{3}{4} = 0{,}75$ (João teve 3 acertos para cada 4 arremessos)

Pedro: $\frac{n^o acertos}{n^o arrremessos} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2} = 0{,}50$ (Pedro teve 1 acerto para cada 2 arremessos)

Como 0,75 > 0,50, concluímos que João teve um aproveitamento melhor que Pedro.

Observação: Se a e b são dois números racionais, e b é diferente de zero, dizemos que a ÷ b ou $\frac{a}{b}$ é a razão entre a e b, nessa ordem. Lemos: "razão de a para b" ou "a está para b".

Razões especiais

Velocidade Média

A **velocidade média** de um objeto é a razão entre a distância percorrida pelo Objeto e o tempo gasto para percorrê-la.

$$velocidade\ média = \frac{distância\ percorrida}{\begin{array}{c}tempo\ para\ percorrer\\ essa\ distância\end{array}}$$

Exemplo: João percorreu 4200 km de avião durante 6 horas. Qual é a velocidade média desenvolvida pelo avião durante esse percurso?

$$\frac{distância\ percorrida}{tempo} = \frac{4200km}{6h} = 700\ km/h$$

Densidade de um material

A razão entre a massa de um material e o volume ocupado por ela nos dá a ideia de **densidade** desse material.

$$densidade = \frac{massa}{volume}$$

Exemplo: Uma placa de chumbo com volume de 0,001 dm^3 tem massa de 11,3 g. Qual é a densidade do chumbo?

$$densidade\ chumbo = \frac{massa}{volume} = \frac{11{,}3g}{0{,}001dm^3}$$

$$densidade\ chumbo = 11300\ g/dm^3$$

Densidade demográfica

O conceito de densidade demográfica é muito utilizado em Geografia.
A **densidade demográfica** de uma região é a razão entre o número de habitantes e a área dessa região.

$$densidade\ demográfica = \frac{número\ de\ habitantes}{área}$$

Exemplo: Em 2010, a população brasileira era de aproximadamente 191 milhões de habitantes, distribuídos em uma área de 8547403 km^2, ou seja, cerca de 8500000 km^2. Qual era o número de habitantes por quilômetro quadrado nesse ano?

Para resolver este problema, basta dividir o número de habitantes, em 2010, pela área.

$$densidade\ demográfica = \frac{número\ de\ habitantes}{área}$$

$$densidade\ demográfica = \frac{191000000hab}{8500000km^2}$$

$$densidade\ demográfica = 22{,}47\ habitantes/km^2$$

Proporção: A proporção é uma igualdade entre duas razões.

Uma proporção envolve quatro termos: **a**, **b**, **c** e **d**. Nessa ordem, temos:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (b e d são diferentes de zero)

Lê-se: "**a** está para **b**, assim como **c** está para **d**".

Propriedade fundamental:

Em uma proporção, o produto dos extremos é igual ao produto dos meios.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longrightarrow a.d = b.c$$

Proporcionalidade entre grandezas

Muitas vezes, a variação de uma grandeza provoca a variação de outra, em uma razão direta ou inversa. Dizemos então que essas grandezas são proporcionais e que essa variação pode se dar em uma **proporcionalidade direta** ou em uma **proporcionalidade inversa.**

Grandezas diretamente proporcionais

Duas grandezas são **diretamente proporcionais** quando as **razões** entre os valores de uma delas e os valores correspondentes da outra são **iguais**.

Exemplo:
Em uma papelaria, cobram-se 20 centavos por página xerocada. Assim:

Quantidade páginas	1	2	3	4	5
Preço total (R$)	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00

A razão entre a quantidade de páginas xerocadas e o preço é sempre a mesma:

$$\frac{1}{0{,}20} = \frac{2}{0{,}40} = \frac{3}{0{,}60} = \frac{4}{0{,}80} = \frac{5}{1{,}00} = 5$$

O preço total é, então, diretamente proporcional à quantidade de páginas xerocadas.

Grandezas inversamente proporcionais

Duas grandezas são inversamente proporcionais quando os produtos dos valores de uma delas pelos valores correspondentes da outra são iguais.

Em outras palavras,duas grandezas são inversamente proporcionais quando uma varia sempre na razão inversa da outra. Assim, ao dobrar o valor de uma, o valor de outra se reduz pela metade; ao dividir por 3 o valor de uma, o valor de outra é multiplicado por 3; e assim por diante.

Exempo: Renato comprou 240 figurinhas da Copa do Mundo de futebol para dividir entre alguns de seus sobrinhos. O número de figurinhas que cada sobrinho receberá depende de quantos sobrinhos Renato vai considerar. Veja a tabela:

n^o sobrinhos	2	3	4	5
n^o figurinhas por sobrinho	120	80	60	48

A razão entre o número de sobrinhos e o inverso do número de figurinhas que cada um recebeu é sempre a mesma:

$$\frac{2}{\frac{1}{120}} = \frac{3}{\frac{1}{80}} = \frac{4}{\frac{1}{60}} = \frac{5}{\frac{1}{48}} = 240$$

Logo, o número de sobrinhos é inversamente proporcional ao número de figurinhas que cada um recebeu.

Regra de três Simples

Podemos resolver problemas que envolvem proporcionalidade entre duas grandezas com uma regra prática, que chamamos **regra de três simples.**

Passos utilizados numa regra de três simples

1) Construir uma tabela, agrupando as grandezas da mesma espécie em colunas e mantendo na mesma linha as grandezas de espécies diferentes em correspondência.
2) Identificar se as grandezas são diretamente ou inversamente proporcionais.
3) Montar a proporção e resolver a equação.

Variantes da Regra de três simples

1) Regra de três simples direta:

Nesta modalidade de regra de três, são envolvidas duas grandezas diretamente proporcionais, ou seja, quando a variação de uma delas corresponde à mesma variação da outra grandeza dada, no problema a ser resolvido.

A montagem da solução deste tipo de problema é feita na mesma ordem de todas as grandezas.

Exemplo:

Em um dia de sol, Janete e Paulo mediram suas sombras. Janete tem 165 cm de altura e Paulo, 180 cm. Sabendo que, em determinado horário, o comprimento da sombra de Paulo era 60 cm, qual era o comprimento da sompra de Janete? (Considere que o comprimento da sombra, em determinado instante, é proporcional à altura da pessoa).

Altura da pessoa (cm)	Comprimento da sombra (cm)
Janete = 165 cm	x
Paulo = 180 cm	60 cm

Como as grandezas são diretamente proporcionais, podemos montar a seguinte proporção:

$$\frac{165}{180} = \frac{x}{60}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções e resolvendo a equação:

$$180x = 165.60$$

$$x = \frac{9900}{180} \Longrightarrow x = 55$$

Portanto, nesse horário, a sombra de Janete tinha 55 cm de comprimento.

2) Regra de três simples inversa:

Nesta modalidade de regra de três são envolvidas duas grandezas inversamente proporcionais, ou seja, quando existe a variação de uma das grandezas a outra varia, porém de forma contrária, mais na mesma proporção.

A montagem da solução deste tipo de problema é feita invertendo as ordens das grandezas.

Exemplo:

Uma torneira enche um barril em 20 minutos, com uma vazão de 15 l/min. Se a vazão fosse 5 l/min, quantos minutos seriam necessários para encher o barril?

vazão (l/min)	Tempo (min)
15	20
5	x

Nesse caso, se dobrarmos a vazão, o tempo para encher o barril ficará reduzido à metade, e assim por diante. Então, as grandezas são inversamente proporcionais e, por isso, montamos a seguinte proporção:

$$\frac{15}{5} = \overbrace{\frac{x}{20}}^{razão\ inversa}$$

$$5x = 15.20 \Longrightarrow x = 60$$

Portanto, se a vazão fosse 5 l/min, seriam necessários 60 minutos para encher o barril.

Regra de três composta

A regra de três composta é utilizada em problemas com mais de duas grandezas, direta ou inversamente proporcionais.

Exemplo:

Trabalhando 5 dias, duas artesãs produzem 60 pares de brincos. Quantos pares de brincos três artesãs, trabalhando no mesmo ritmo que as outras, produzirão em 2 dias?

Vamos organizar os dados:

nº de dias	nº de artesãs	nº de pares de brincos
5	2	60
2	3	x

Vamos comparar a grandeza número de pares de brincos (na qual está o termo desconhecido) com as outras duas grandezas:

- O número de dias é diretamente proporcional ao número de pares de brincos;

- O número de artesãs também é diretamente proporcional ao número de pares de brincos.

Para resolver o problema, usaremos o fato de que, se uma grandeza é proporcional a outras grandezas, então é proporcional ao produto delas.
Assim:

$$\overbrace{\frac{5}{2}}^{\substack{\text{razão entre o}\\ n^o\text{ de dias}}} \cdot \underbrace{\frac{2}{3}}_{\substack{\text{razão entre o}\\ n^o\text{ de artesãs}}} = \overbrace{\frac{60}{x}}^{\substack{\text{razão entre o } n^o\text{ de}\\ \text{pares de brincos}}}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{10}{6} = \frac{60}{x} \Longrightarrow x = 36$$

Portanto, 3 artesãs produzirão 36 pares de brincos em 2 dias.

Exemplo:
Em um prédio, 6 pintores pintam uma área de 300 m^2 em 2 horas. Quantos pintores, trabalhando no mesmo ritmo que os outros, são necessários para pintar uma área de 400 m^2 em 1 hora?

n^o de pintores	Área (m^2)	Tempo (h)
6	300	2
x	400	1

Comparando a grandeza número de pintores (na qual está o termo desconhecido) com as outras duas:

- O número de pintores é diretamente proporcional à área pintada;
- O número de pintores é inversamente proporcional ao tempo gasto.

Então, podemos escrever:

$$\overbrace{\frac{6}{x}}^{\substack{\text{razão entre o}\\ n^o\text{ de pintores}}} = \underbrace{\frac{300}{400}}_{\substack{\text{razão entre as}\\ \text{áreas}}} \cdot \overbrace{\frac{1}{2}}^{\substack{\text{razão inversa entre}\\ \text{os tempos}}}$$

Aplicando a propriedade fundamental das proporções:

$$\frac{6}{x} = \frac{300}{800} \Longrightarrow x = 16$$

Exercícios - Aula 9

01) Marcos e Renato se destacaram em um campeonato de futebol interclasses da escola. De 50 chutes a gol, Marcos acertou 20 e, de 60 chutes a gol, Renato acertou 40. Qual deles teve o melhor aproveitamento nesse campeonato? Por quê?

02) Em um jogo de vôlei, de cada 12 saques que Rita deu, ela acertou 8.

a) Qual é a razão entre o número de acertos e o número de saques?
b) Se ela tivesse dado apenas 3 saques com o mesmo aproveitamento, quantos deles teria acertado?

03) Em uma empresa, 12 pessoas concorrem a uma vaga de secretário. A razão entre o número de candidatos e o total de vagas e 3/2. Quantas vagas estão sendo oferecidas?

04) Em 2010, Brasília, a capital brasileira, que ocupa uma área aproximada de 5800 km^2, tinha cerca de 2563000 habitantes. Qual era a densidade demográfica de Brasília, naquele ano?

05) Em 2010, a população de Belém, capital do Pará, era de aproximadamente 1400000 habitantes, e sua área era de 1065 km^2. Já João Pessoa, capital da Paraíba, tinha 724000 habitantes, aproximadamente, em uma área de 210 km^2. Qual era a densidade demográfica

de Belém em 2010? E a de João Pessoa?

06) A distância entre Campo Grande e Dourados é de 224 km, aproximadamente. Qual a velocidade média desenvolvida por:
   a) Uma moto que fez esse percurso em 4 horas?
   b) Um automóvel que fez esse percurso em 5 horas?
   c) Uma bicicleta que fez esse percurso em 12 horas e 30 minutos?

07) A letra x representa um número racional. Os números 12, 15, 4 e x formam uma proporção, nessa ordem. Qual é o valor de x?

08) Na prova de Matemática, uma professora propôs questões envolvendo o cálculo do termo desconhecido das proporções: $\frac{16}{x} = \frac{8}{49}$; $\frac{50}{7a} = \frac{25}{49}$; $\frac{17}{n} = \frac{34}{9}$. Determine x, a e n.

09) Nos jogos escolares do ano passado, a razão entre o número de moças e o de rapazes que participaram foi 2/3. O número de rapazes foi 168. Quantas pessoas participaram desses jogos?

10) Os números 3, 5 e x são diretamente proporcionais aos números 15, y e 45, nessa ordem. Quais são os valores de x e y?

11) São necessários 2 minutos para encher um balde usando determinada torneira. Se usássemos 2 torneiras com a mesma vazão, demoraria 1 minuto. Quanto tempo levaria para encher o balde se usássemos 4 torneiras?

12) Lúcia desenhou um retângulo de comprimento 15 cm e largura 3 cm. Bruno desenhou outro retângulo de mesma área e comprimento 9 cm. Qual é a largura do retângulo desenhado por Bruno?

13) Três pintores cobraram R$ 5200,00 pela pintura de uma casa e combinaram que receberiam o valor em partes diretamente proporcionais ao número de dias trabalhados. O primeiro trabalhou 15 dias, o segundo, 12 dias e o terceiro, 25 dias. Quanto recebeu cada um?

14) Em um passeio ciclístico, Fernando percorreu 36 km em 3 horas. Mantendo a mesma velocidade média, ele percorreu 6 km em meia hora.
   a) Que tipo de proporcionalidade existe entre o espaço percorrido e o tempo?
   b) Qual é o fator de proporcionalidade?

15) Uma universidade comunicou que, para o vestibular do curso de História, o número de candidatos por vaga era igual a 16. Se a universidade ofereceu 300 vagas, quantos candidatos havia?

16) Uma indústria fornece refeições aos empregados. Um balanço revelou que 100 funcionários, alimentados durante 10 dias, custam à empresa R$ 1600,00. Quanto custam as refeições para 150 funcionários durante esse mesmo período?

17) Três mangueiras iguais, juntas, têm vazão de 12 litros de água por minuto. Qual será a vazão por minuto de 7 dessas mangueiras juntas?

18) Elisa trabalha como tradutora de livros e recebe um valor fixo por página traduzida. Para traduzir um livro de 127 páginas, ela recebeu R$ 1789,00. Nesta semana, ela recebeu uma proposta para traduzir um livro de 587 páginas. Quanto ela deverá receber por essa tradução?

19) Márcia queria ampliar uma fotografia. Na loja de revelação de fotos, a funcionária anotou as medidas da fotografia, 2 cm de altura e 3 cm de comprimento, e perguntou qual deveria ser o tamanho da foto ampliada. Márcia respondeu apenas que a foto deveria ter 15 cm de altura. Qual será o comprimento da foto ampliada se as proporções forem mantidas?

20) Em uma hora, 4 torneiras despejam 1000 litros de água num reservatório.

   a) Se fossem 9 torneiras, com a mesma vazão, quantos litros de água seriam despejados por hora?

b) Se a capacidade do reservatório é de 18000 litros e ele está completamente vazio, quanto tempo será necessário para enchê-lo com as 9 torneiras?

21) Meire é proprietária de uma fábrica de calças. Atualmente, a fábrica produz 78 calças por dia, utilizando 260 metros de tecido. Para o próximo mês, Meire deverá aumentar sua produção, passando a fabricar 99 calças por dia. Considerando que os modelos das calças serão os mesmos, quanto de tecido será usado a mais por dia para essa nova produção?

22) Pedro vai viajar para o Rio de Janeiro. Com velocidade média de 60 km/h, levará 3 horas para percorrer o trajeto. Quanto tempo ele gastaria se a velocidade média fosse de 90 km/h?

23) Na indústria de bicicletas Aro Azul, 4 máquinas produzem 48 guidões de bicicletas em 6 dias. Quantos guidões de bicicletas serão produzidos em 9 dias por 10 máquinas?

24) Em 8 horas, 20 caminhões descarregam 160 m^3 de terra. Quantos caminhões serão necessários para descarregar 125 m^3 de terra em 5 horas?

25) Lúcia viajou de automóvel durante 6 dias, dirigindo 6 horas por dia, com velocidade média de 80 km/h. Determine quantos dias duraria a viagem de Lúcia se ela dirigisse durante 8 horas por dia à velocidade média de 90 km/h?

26) Uma empresa gasta R$ 6500,00 no café da manhã de 180 funcionários durante 30 dias. Quanto a empresa gastaria para oferecer o mesmo café da manhã para 300 funcionários durante 90 dias?

27) Um navio de passageiros precisa de 180000 litros de água potável para atender 1500 pessoas durante um cruzeiro de 15 dias. Quantos litros de água potável deverão ser armazenados para atender 1800 pessoas durante uma viagem de 9 dias?

28) Quatro trabalhadores colhem, em média, 200 caixas de laranjas em 5 dias, trabalhando em um certo ritmo. Quantas caixas de laranjas iguais a essas serão colhidas em 3 dias, por 6 trabalhadores, no mesmo ritmo de colheita?

29) Uma viagem entre duas cidades foi feita de carro, em 4 dias, a uma velocidade média de 75 quilômetros por hora, viajando-se 9 horas por dia. Viajando a 90 quilômetros por hora, durante 5 horas por dia, em quantos dias iríamos de uma cidade à outra?

30) Claudia tem em uma confecção 36 funcionárias que produzem em média 5400 camisetas por dia, trabalhando 6 horas. O verão trouxe novidades e muitas encomendas, e a fábrica passou a ter 96 funcionárias, produzindo 21600 camisetas por dia. Quantas horas por dia elas passaram a trabalhar?

Gabarito – exercícios – aula 9

01) Renato, porque 2/3 > 2/5
02) a) 8/12 ou 2/3; b/ 2 saques
03) 8 vagas
04) 441,9 hab/km^2
05) 1314,55 hab/km^2; 3447,62 hab/km^2
06) a) 56km/h; b) 44,8km/h c) 17,92km/h
07) 5
08) 98; 14; 9/2
09) 280 pessoas
10) X=9 e y=25
11) 30 segundos ou 0,5 minutos
12) 5 cm
13) 1º: R$ 1500,00; 2º: R$ 1200,00; 3º: R$ 2500,00
14) Proporcionalidade direta; 12 ou 1/12
15) 4800 candidatos
16) R$ 2400,00
17) 28 litros de água por minuto
18) Aproximadamente R$ 8268,84
19) 22,5 cm
20) a) 2250 litros; b) 8 horas
21) 70 metros
22) 2 horas
23) 180 guidões
24) 25 caminhões
25) 4 dias
26) R$ 32500,00
27) 129600 litros
28) 180 caixas
29) 6 dias
30) 9 horas por dia